

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО
Директор Высшей школы
современной математики
А.Н. Соболевский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Математический анализ III
по направлению:	Математика
профиль подготовки:	Фундаментальная математика Высшая школа современной математики Высшая школа современной математики
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 90 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 96 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 216, всего зач. ед.: 6

Программу составил: А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании Высшая школа современной математики 02.09.2024

Аннотация

Курс посвящен основам классического математического анализа (вещественные числа, множества вещественных чисел, последовательности и их пределы, функции вещественного переменного, пределы, производные, графики, формула Тейлора, функции нескольких переменных, дифференциалы отображений, числовые, степенные и функциональные ряды, интегралы и приложения интегрального исчисления, теорема о неявной функции и ее приложения, условный экстремум функций многих переменных). Третий семестр охватывает материал, связанный с анализом на многообразиях и анализом Фурье.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Изучение теоретических основ математического анализа для дальнейшего использования в других математических дисциплинах аналитического цикла; формирование математической культуры, исследовательских навыков. в том числе для решения вычислительных задач, и способности применять знания на практике.

Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области математического анализа;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в соотнесении результатов математического анализа с контекстом других математических дисциплин

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-2 Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.1 Формулирует совокупность взаимосвязанных задач в рамках поставленной цели работы, обеспечивающих ее достижение. Определяет ожидаемые результаты решения поставленных задач
	УК-2.2 Проектирует решение конкретной задачи проекта, выбирая оптимальный способ ее решения, исходя из действующих правовых норм и имеющихся ресурсов и ограничений
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-5 Способен разрабатывать алгоритмы и компьютерные программы, пригодные для практического применения	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

Основные понятия анализа на многообразиях и анализа Фурье.

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельных вычислений с гладкими функциями на многообразиях и в анализе Фурье.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Кратный интеграл.	4	8		12
2	Площадь поверхности.	2	4		8
3	Дифференциальные уравнения.	2	4		8
4	Цепи. Группы гомологий	4	8		12
5	Гладкие многообразия. Теорема Сарда.	4	8		12
6	Симметрии векторных полей.	4	8		12
7	Дифференциальные формы.	2	4		8
8	Ряды Фурье.	4	8		12
9	Обобщенные функции и пространства Соболева.	4	8		12
Итого часов		30	60		96
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		216 час., 6 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

1. Кратный интеграл.

Кратный интеграл.

Теорема Фубини.

Формула замены переменных в кратном интеграле.

2. Площадь поверхности.

Гладкие поверхности.

Мера Хаусдорфа.

Площадь поверхности.

3. Дифференциальные уравнения.

Дифференциальные уравнения.

Поле направлений.

Дифференциальные формы и уравнения в дифференциалах.

Лемма Фробениуса.

4. Цепи. Группы гомологий

Цепи.

Группы гомологий

Интегрирование по цепям.

Теорема Стокса.

5. Гладкие многообразия. Теорема Сарда.

Гладкие многообразия.

Теорема Сарда

Вложение многообразия в конечномерное вещественное векторное пространство.

Степень отображения и ее приложения.

6. Симметрии векторных полей.

Векторное поле и фазовый поток.

Скобка Ли.

Симметрии векторных полей.

Группы и алгебры Ли.

7. Дифференциальные формы.

Дифференциальные формы.

Группа когомологий и их связь с гомологиями.

Теоремы де Рама.

8. Ряды Фурье.

Евклидово пространство.

Ряды Фурье.

Связь рядов Фурье и представлений компактных групп Ли.

9. Обобщенные функции и пространства Соболева.

Обобщенные функции и пространства Соболева.

Преобразование Фурье и решение уравнения с частными производными.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Математический анализ [Текст] : в 2 ч. : учебник для вузов / В. А. Зорич .— 5-е изд. — М. : МЦНМО, 2007. — Ч.1. - 2007. - 664 с.
2. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] : учебник для вузов / А. Н. Колмогоров, С. В.Фомин .— 7-е изд. — М. : Физматлит, 2004, 2006, 2009, 2012 .— 572 с.

Дополнительная литература

1. Основы математического анализа [Текст] = Principles of mathematical analysis : [учеб. пособие для вузов] / У. Рудин ; пер. с англ. В. П. Хавина ; 2-е изд., стереотип. — М. : Мир, 1976 .— 320 с.
2. Теоремы и задачи функционального анализа [Текст] : учебное пособие для вузов : доп. М-вом высш. и сред. спец. образов. СССР / А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1988 .— 398с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<https://old.mccme.ru/iur/courses.php>

<https://library.mccme.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных и практических (семинарских) занятиях могут использоваться мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций, а также технологии дистанционной аудиовидеоконференцсвязи.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Методические указания приводятся в разрабатываемых аудиторных и домашних раздаточных материалах (листочках).

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Математика
профиль подготовки:	Фундаментальная математика Высшая школа современной математики Высшая школа современной математики
курс:	<u>2</u>
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Разработчик: А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-2 Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.1 Формулирует совокупность взаимосвязанных задач в рамках поставленной цели работы, обеспечивающих ее достижение. Определяет ожидаемые результаты решения поставленных задач
	УК-2.2 Проектирует решение конкретной задачи проекта, выбирая оптимальный способ ее решения, исходя из действующих правовых норм и имеющихся ресурсов и ограничений
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-5 Способен разрабатывать алгоритмы и компьютерные программы, пригодные для практического применения	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Математический анализ III» обучающийся должен:

знать:

Основные понятия анализа на многообразиях и анализа Фурье.

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельных вычислений с гладкими функциями на многообразиях и в анализе Фурье.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по материалу предыдущего занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Кратный интеграл. Теорема Фубини
2. Формула замены переменных в кратном интеграле
3. Гладкие поверхности. Мера Хаусдорфа. Площадь поверхности
4. Дифференциальные уравнения. Поле направлений. Дифференциальные формы и уравнения в дифференциалах. Лемма Фробениуса
5. Цепи. Группы гомологий
6. Интегрирование по цепям. Теорема Стокса
7. Гладкие многообразия. Теорема Сарда
8. Вложение многообразия в конечномерное вещественное векторное пространство. Степень отображения и ее приложения
9. Векторное поле и фазовый поток. Скобка Ли. Симметрии векторных полей
10. Группы и алгебры Ли
11. Дифференциальные формы. Группа когомологий и их связь с гомологиями. Теоремы де Рама
12. Евклидово пространство. Ряды Фурье
13. Связь рядов Фурье и представлений компактных групп Ли
14. Обобщенные функции и пространства Соболева
15. Преобразование Фурье и решение уравнения с частными производными

Пример экзаменационного билета:

- 1) Ряд Фурье, определение и примеры.
- 2) Теорема Стокса.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Зачет проводится по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, предусмотренных программой дисциплины.

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 40 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не может продолжаться более двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена и зачета обучающимся запрещается пользоваться помощью других лиц и мобильными телефонами, разрешается пользоваться программой учебной дисциплины и справочной литературой по выбору экзаменатора.